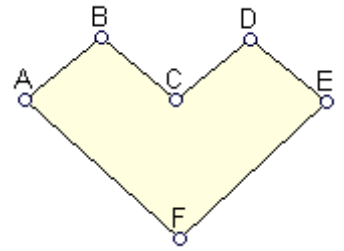


## 61 Олімпіада юних математиків

2010 – 2011 навч. рік

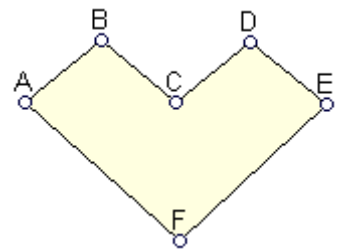
### 6 клас

1. Розрізати фігуру, що зображена на малюнку на 8 однакових частин.
2. У парку росли липи та клени. Кленів серед них було 60%. Весною в парку посадили липи, після чого кленів стало 20%. А восени посадили клени і кленів стало знову 60%. У скільки разів збільшилась кількість дерев у парку за рік?
3. Розшифрувати рівність  $A \times C \times AC = CCC$ .
4. Знайти два числа, якщо їх сума дорівнює 432, а найбільший спільний дільник дорівнює 36.
5. Як, маючи дві посудини місткістю 9л і 4л, принести з річки 6л води?



### 6 класс

1. Разрезать фигуру на рисунке на 8 одинаковых частей.
2. В парке росли липы и клёны. Клёнов среди них было 60%. Весной посадили липы, после чего клёнов стало 20%. А осенью посадили клёны, и клёнов стало снова 60%. Во сколько раз увеличилось количество деревьев в парке за год?
3. Расшифровать равенство  $A \times C \times AC = CCC$ .
4. Найти два числа, если их сумма равна 432, а наибольший общий делитель равен 36.
5. Как, имея две ёмкости объёмом 9л и 4л принести из речки 6 литров воды?



На виконання роботи відводиться 3 години  
Кожне завдання оцінюється в 7 балів  
Використання калькуляторів не дозволяється

## 61 Олімпіада юних математиків

2010 – 2011 навч. рік

### 7 клас

1. У підводного царя служать осміноги у яких шість, сім, або вісім ніг. Ті, що мають 7 ніг, завжди брешуть, а ті, що мають 6 або 8 ніг завжди говорять правду. Зустрілися чотири осмінога. Синій сказав: «Разом у нас 28 ніг», зелений: «Разом у нас 27 ніг», жовтий: «Разом у нас 26 ніг», красний: «Разом у нас 25 ніг». У кого скільки ніг?
2. Цифру 9, із якої починається трицифрове число, написали в кінці числа. Нове число на 216 менше, ніж початкове. Яке було початкове число?
3. Двоє по черзі довільним чином фарбують одну або дві клітинки шахової дошки  $6 \times 8$  у червоний колір. Виграє той, хто зафарбує останню клітинку. Хто з гравців має виграшну стратегію?
4. Довести, що  $2^{2011} + 3^{2011}$  ділиться на 5.
5. Відновити запис множення

$$\begin{array}{r} * \quad 2 \quad * \\ * \quad 7 \\ \hline * \quad * \quad * \\ * \quad * \quad * \quad * \\ \hline * \quad * \quad * \quad * \quad 8 \end{array}$$

### 7 клас

1. У подводного царя служат осьминоги с шестью, семью или восемью ногами. Те, у кого 7 ног, всегда лгут, а у кого 6 или 8 ног, всегда говорят правду. Встретились четыре осьминога. Синий сказал: «Вместе у нас 28 ног», зелёный сказал: «Вместе у нас 27 ног», жёлтый сказал: «Вместе у нас 26 ног», красный сказал: «Вместе у нас 25 ног». У кого сколько ног?.
2. Цифру 9, с которой начинается трехзначное число, написали в конце числа. Новое число на 216 меньше, чем начальное. Каким было начальное число?
3. Двое по очереди произвольным образом красят одну или две клетки шахматной доски  $6 \times 8$  в красный цвет. Выигрывает тот, кто закрасит последнюю клеточку. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?
4. Доказать, что число  $2^{2011} + 3^{2011}$  делится на 5.
5. Восстановить запись умножения

$$\begin{array}{r} * \quad 2 \quad * \\ * \quad 7 \\ \hline * \quad * \quad * \\ * \quad * \quad * \quad * \\ \hline * \quad * \quad * \quad * \quad 8 \end{array}$$

На виконання роботи відводиться 4 години  
Кожне завдання оцінюється в 7 балів  
Використання калькуляторів не дозволяється

## 61 Олімпіада юних математиків

2010 – 2011 навч. рік

### 8 клас

1. На гіпотенузі  $AB$  прямокутного трикутника  $ABC$  вибрана точка  $K$ , для якої  $CK = BC$ . Відрізок  $CK$  перетинає бісектрису  $AM$  в її середині. Знайти кути трикутника  $ABC$ .
2. Довести, що вираз  $(x-1) \cdot (x-3) \cdot (x-4) \cdot (x-6) + 10$  набуває додатних значень при всіх значеннях  $x$ .
3. Коли автомобіль проїхав частину шляху від А до В, виявилось, що він проїхав стільки кілометрів, скільки хвилин йому прийдеться їхати частину шляху, що залишилась. Але, коли він проїхав і цю частину шляху, то виявилось, що знову він проїхав стільки кілометрів, скільки хвилин він витратив на першу частину шляху. Скільки кілометрів за годину проїжджав автомобіль?
4. Побудувати графік функції  $y = |x+1| - \frac{x}{|x|}$ .
5. Довести, що сума  $3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{100}$  ділиться на 120.

### 8 класс

1. На гипотенузе  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  выбрана точка  $K$ , для которой  $CK = BC$ . Отрезок  $CK$  пересекает биссектрису  $AM$  в её середине. Найти углы треугольника  $ABC$ .
2. Доказать, что выражение  $(x-1) \cdot (x-3) \cdot (x-4) \cdot (x-6) + 10$  принимает положительные значения при всех значениях  $x$ .
3. Когда автомобиль проехал часть пути от А до В, то оказалось, что он проехал столько километров, сколько минут ему придётся ехать оставшуюся часть. Но когда он проехал и эту часть пути, то оказалось, что опять он проехал столько километров, сколько минут он затратил на первую часть пути. Сколько километров за час проезжает автомобиль?
4. Построить график функции  $y = |x+1| - \frac{x}{|x|}$ .
5. Доказать, что сумма  $3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{100}$  делится на 120.

На виконання роботи відводиться 4 години  
Кожне завдання оцінюється в 7 балів  
Використання калькуляторів не дозволяється

## 61 Олімпіада юних математиків

2010 – 2011 навч. рік

### 9 клас

1. Нехай  $a, b, c$  - довжини сторін трикутника, а  $S$  - його площа. Відомо, що  $S = \frac{1}{4}(c^2 - a^2 - b^2)$ . Довести, що  $\angle C = 135^\circ$ .
2. Основи рівнобічної трапеції 3см і 12см, середина більшої основи з'єднана з кінцями меншої основи відрізками, що перетинають діагоналі трапеції в двох точках. Знайти відстань між цими точками.
3. Довести, що  $(a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1) \geq 8\sqrt{abc}$ , якщо  $a \geq 0$ ;  $b \geq 0$ ;  $c \geq 0$ .
4. Побудувати графік функції  $y = \frac{|x+2|}{4-x^2}$ .
5. При яких значеннях  $a$  рівняння  $(a+4x-x^2-1) \cdot (a+1-|x-2|) = 0$  має рівно три корені?

### 9 класс

1. Пусть  $a, b, c$  - длины сторон треугольника, а  $S$  - его площадь. Известно, что  $S = \frac{1}{4}(c^2 - a^2 - b^2)$ . Доказать, что  $\angle C = 135^\circ$ .
2. Основания равнобокой трапеции 3см и 12см, середина большего основания соединена с концами верхнего основания отрезками, пересекающими диагонали в двух точках. Найти расстояние между этими точками.
3. Доказать, что  $(a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1) \geq 8\sqrt{abc}$ , если  $a \geq 0$ ;  $b \geq 0$ ;  $c \geq 0$ .
4. Построить график функции  $y = \frac{|x+2|}{4-x^2}$ .
5. При каких значениях  $a$ , уравнение  $(a+4x-x^2-1) \cdot (a+1-|x-2|) = 0$  имеет ровно три корня.

На виконання роботи відводиться 4 години  
Кожне завдання оцінюється в 7 балів  
Використання калькуляторів не дозволяється

## 61 Олімпіада юних математиків

2010 – 2011 навч. рік

### 10 клас

1. Два кола перетинаються в точках  $A$  і  $B$ . В точці  $A$  до кіл проведені дві дотичні, які перетинають кола в точках  $M$  і  $N$ . Знайти суму кутів  $\angle ABN + \angle MAN$ .
2. Довести нерівність  $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2011^2} < 1$ .
3. Розв'язати рівняння  $\sqrt{x} + \sqrt{x+5} + 2\sqrt{x^2+5x} = 25 - 2x^2$ .
4. Побудувати графік функції  $\frac{y^2 - 1}{|y| - 1} = \frac{1}{|x|}$ .
5. Знайти найменше значення виразу  $x + y + z$ , якщо 
$$\begin{cases} xy + yz = 8; \\ yz + xz = 9; \\ xz + xy = 5. \end{cases}$$

### 10 класс

1. Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . В точке  $A$  к окружностям проведены две касательные, которые пересекают окружности в точках  $M$  и  $N$ . Найти сумму углов  $\angle ABN + \angle MAN$ .
2. Доказать неравенство  $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2011^2} < 1$ .
3. Решить уравнение  $\sqrt{x} + \sqrt{x+5} + 2\sqrt{x^2+5x} = 25 - 2x^2$ .
4. Построить график функции  $\frac{y^2 - 1}{|y| - 1} = \frac{1}{|x|}$ .
5. Найти наименьшее значение выражения  $x + y + z$ , если 
$$\begin{cases} xy + yz = 8; \\ yz + xz = 9; \\ xz + xy = 5. \end{cases}$$

На виконання роботи відводиться 4 години  
Кожне завдання оцінюється в 7 балів  
Використання калькуляторів не дозволяється

## 61 Олімпіада юних математиків

2010 – 2011 навч. рік

### 11 клас

1. Середина діагоналі  $AC$  чотирикутника  $ABCD$ , вписаного в коло, лежить на діагоналі  $BD$ . Довести, що  $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2 \cdot BD^2$ .
2. Розв'язати рівняння  $2 \cos x = 2^x + 2^{-x}$ .
3. Числа, що виражають довжини сторін прямокутного трикутника, утворюють арифметичну прогресію. Менший катет цього трикутника дорівнює  $a$ . Знайти площу трикутника.
4. Побудувати графік функції  $y = (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} \cdot \cos x) \cdot \sqrt{|x|}$ .
5. Розв'язати систему рівнянь 
$$\begin{cases} \sqrt{x + y + 1} + \sqrt[3]{8 - x - y} = 3; \\ xy = 34. \end{cases}$$

### 11 класс

1. Середина діагоналі  $AC$  чотирикутника  $ABCD$ , вписаного в окружность, лежить на діагоналі  $BD$ . Доказать, что,  $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2 \cdot BD^2$ .
2. Решить уравнение  $2 \cos x = 2^x + 2^{-x}$ .
3. Числа, которые выражают длины сторон прямоугольного треугольника, образуют арифметическую прогрессию. Меньший катет этого треугольника равен  $a$ . Найти площадь треугольника.
4. Построить график функции  $y = (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} \cdot \cos x) \cdot \sqrt{|x|}$ .
5. Решить систему уравнений 
$$\begin{cases} \sqrt{x + y + 1} + \sqrt[3]{8 - x - y} = 3; \\ xy = 34. \end{cases}$$

На виконання роботи відводиться 4 години  
Кожне завдання оцінюється в 7 балів  
Використання калькуляторів не дозволяється